

Фундингер Д.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Об исследовании аттракторов: алгоритмы локализации областей притяжения.

Рекомендовано к публикации профессором Осипенко Г.С.

1 Введение.

Локализация аттракторов и их областей притяжения - важная сфера анализа динамических систем. Знания о расположении аттракторов и их областей притяжения, поставляют нам существенную информацию о динамической системе, и позволяют представить поведение траекторий системы. Доклад описывает методы численной локализации аттракторов, а так же областей притяжения динамических систем. Мы сосредоточимся на теоретических аспектах этих алгоритмов, таких как доказательства корректности и анализ эффективности.

Представленная технология основана на теоретических результатах Г.С.Осипенко [7, 8], В её основе лежит следующая конструкция. Динамической системе сопоставляется ориентированный граф, называемый символическим образом. Символический образ можно рассматривать как конечное дискретное приближение динамической системы. Изучение структуры символического образа позволяет построить окрестность множества цепно-рекуррентных траекторий и исследовать глобальную структуру динамической системы. Анализ символического образа дает возможность построить аттракторы и репеллеры на нем и, таким образом, локализовать аттракторы и репеллеры динамической системы. Эта методика позволяет оценить область притяжения аттрактора и построить фильтрацию системы.

Реализация, которую мы используем, является частью проекта АпТ [4, 1], создаваемого в университете Штуттгарта в Германии. Новые конструктивные методы исследования, описанные здесь, тоже являются частью этого проекта. Мы эти методы интенсивно

тестировались и применялись для изучения динамических систем физики, биологии и техники.

2 Построение символического образа.

Пусть Дискретная динамическая система $\vec{f} : M \rightarrow M$. M является гомеоморфизмом компакта. Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ – конечное покрытие компакта M замкнутыми множествами. Множества $M(i)$ назовем ячейками покрытия. Для каждого номера i определим подпокрытие $C(i)$ образа ячейки $M(i)$, состоящее из тех ячеек $M(j)$, которые его пересекают:

$$C(i) = \{M(j) | M(j) \cap \vec{f}(M(i)) \neq \emptyset\}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. [8] Пусть G есть ориентированный граф, имеющий $n = |C|$ вершин c_i , при этом номер вершины c_i соответствует ячейке $M(i)$ (см. рис. 1). Вершины c_i и c_j связаны ориентированным ребром (дугой) $c_i \rightarrow c_j$ если, и только если, $M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения \vec{f} относительно покрытия C .

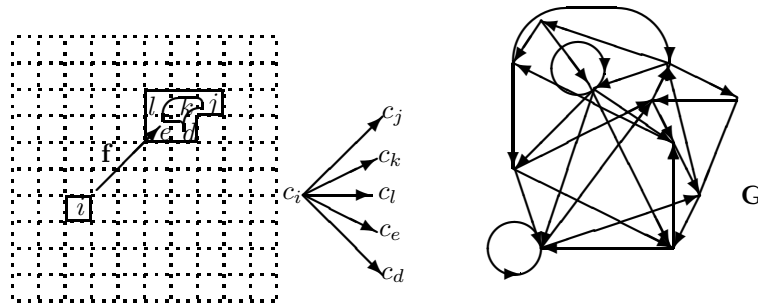


Рис. 1: Построение символического образа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. [8] Последовательность c_k вершин графа G называется допустимым путем (или просто путем), если для любого $k \in \mathbb{Z}$ граф G содержит ребро $c_k \rightarrow c_{k+1}$.

Путь называется периодическим, если последовательность $\{c_k\}$ является периодической.

Вершина символического образа называется возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается RV . Две возвратные вершины c_i и c_j называются эквивалентными, если существует периодический путь, содержащий обе эти вершины.

Множество вершин графа G называется $V(G)$. Рассмотрим подграф $G(L)$ с множеством вершин $L \subset V(G)$ и множеством ребер $c_i \rightarrow c_j$, где вершины c_i и c_j принадлежат L . Будем говорить, что L инвариантное множество, если для каждой вершины $c_i \in L$ существуют ребра $c_j \rightarrow c_i$ и $c_i \rightarrow c_k$ в $G(L)$. Можно сказать, что L инвариантное, если через каждую вершину $c_i \in L$ проходит допустимый бесконечный в обе стороны путь, лежащий в L . Множество вершин

$$Ex(L) = \{c_i \in L \mid \text{существует ребро } c_i \rightarrow c_j, c_j \notin L\} \quad (2)$$

называется выходом из L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. [6] Будем говорить, что инвариантное множество $L \subset V(G)$ есть аттрактор, если оно не имеет выхода, т.е. $Ex(L) = \emptyset$.

Пусть L аттрактор. Будем говорить, что $D(L)$ есть область притяжения для L , если

$$D(L) = \{c_j \mid \text{любой путь, проходящий через } c_j \text{ заканчивается в } L\}. \quad (3)$$

То есть, для любого пути $\{\dots, c_j, \dots, c_k, \dots\}$ существует число k^* такое, что вершины c_k , $k > k^*$, принадлежат L .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Каждый аттрактор L состоит только из классов эквивалентных возвратных вершин и путей между этими классами.

3 Локализация областей притяжения

Мы представим алгоритм локализации областей притяжения. Этот алгоритм позволяет для любого аттрактора L на символическом

образе найти его область притяжения $D(L)$. Полученное множество вершин $D(L)$, позволяет оценить область притяжения $W^s(\Lambda)$ аттрактора Λ на многообразии M , где $\{\bigcup M(i), i \in L\}$ является локализацией аттрактора Λ . Чтобы получить более точное оценку аттрактора и его области притяжения, нужно взять более мелкое покрытие. По-этому мы используем технику подразбиений (см. [6, 5]) ячеек $M(i)$, $c_i \in D(L)$.

В начале мы строим новый граф DG , отождествляя эквивалентные возвратные вершины графа G . Будем обозначать вершины графа DG символом c'_i , для $i = 1, \dots, |DG|$. Все невозвратные вершины графа G и их связи не меняются на DG . Так мы получаем новый ациклический граф DG . У него есть только вершины, которые соответствуют классам эквивалентных возвратных вершин графа G и невозвратные вершины G . Для любого графа H обозначим граф с обратной ориентацией ребер как H^{-1} . В наших построениях мы будем использовать граф DG^{-1} .

Для локализации областей притяжения нужно выбирать некоторый аттрактор L . Пусть множество $\zeta \subseteq DG$ является все вершины c'_k , которые соответствуют классам эквивалентных возвратных вершин на G , при этом эти классы не имеют выхода на G (см. уравнение 2). Представленный алгоритм позволяет выбрать пользователю подмножество $L \subseteq \zeta$. Множество L является аттрактором на символическом образе.

Для вычисления области притяжения нужно сделать два шага. Сначала алгоритм вычисляет верхнюю границу областей, и потом нижнюю границу. Будем говорить, что множество

$$D_u(L) = \{c'_i \mid \text{существует путь, проходящий через } c'_i, \\ \text{заканчивается в } L\},$$

называется верхней границей, а так же множество

$$D_l(L) = \{c'_i \mid \text{любой путь, проходящий через } c'_i \text{ заканчивается в } L\}.$$

называется нижней границей. Тогда $D_u(L) \supseteq D_l(L)$, и L является частью $D_l(L)$. Если есть дуальной репереллер L^* к аттрактору L , тогда L^* тоже является частью $D_l(L)$.

Для построения верхней границы $D_u(L)$ мы используем *поиск в ширину* (*breadth-first search*, см. Aho [2]). Алгоритм начинает поиск от каждой вершины $c'_k \in L$ и проходит пути на обратном графе

DG^{-1} . Все достижимые вершины являются верхней оценкой области притяжения $D_u(L)$.

После построения верхней границы $D_u(L)$, алгоритм может построить нижнюю границу $D_l(L)$. Он использует опять *поиск в ширину* и проходит пути на DG^{-1} . Но сейчас он начинает поиск от каждой вершины $c'_k \notin D_u(L)$. Через все, построенные таким образом вершины, существует путь, который не заканчивается в L . Таким образом, мы построили множество

$$D_p(L) = \{c'_i \mid c'_i \in V(DG) \setminus D_l(L)\}. \quad (4)$$

Тогда нижняя граница является множеством вершин

$$D_l(L) = D_u(L) \setminus D_p(L). \quad (5)$$

Если мы используем технику подразбиений, алгоритм вычисляет последовательность верхних границ $D_u(L_0), D_u(L_1), D_u(L_2), \dots, D_u(L_n)$. Каждое новое подразбиение C^{k+1} — касается только верхней границы $D_u(L_k)$. Окрестности вложены друг в друга, т. е.

$$D_u(L_0) \supset D_u(L_1) \supset D_u(L_2) \supset \dots \supset D_u(L_n)$$

Алгоритм вычисляет нижнюю оценку области притяжения только для последней верхней границы $D_u(L_n)$. Пусть $D_l(L_n)$ — нижняя оценка на символическом образе, тогда множество

$$\left\{ \bigcup M(i), c_i \in D_l(L_n) \right\} \subset W^s(\Lambda)$$

является оценкой снизу области притяжения $W^s(\Lambda)$ аттрактора Λ .

4 Анализ эффективности

Пусть n число вершин графа G^k или число ячеек покрытия $C^k \subset M$, $n = |V(G^k)|$. Известен следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. [3] *Временная сложность для построения символического образа G и локализации возвратных вершин имеет оценку $O(n \cdot \log(n))$.*

ТЕОРЕМА 4.2. *Временная сложность для построения ациклического графа DG имеет оценку $O(n \cdot \log(n))$.*

ТЕОРЕМА 4.3. *Временная сложность локализации верхней и нижней границы $D_u(L)$ и $D_l(L)$ аттрактора L имеет оценку $O(n)$.*

Таким образом, временная сложность возрастает почти линейно с числом вершин покрытия $C^k \subset M$.

Литература

1. Home page of the AnT 4.669 project, 2004. Available at <http://www.AnT4669.de>.
2. A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley, 1987.
3. V. Avrutin, D. Fundinger, P. Levi, G. S. Osipenko, and M. Schanz. Calculation of symbolic images, part I: On an efficient implementation. Submitted to International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004.
4. V. Avrutin, R. Lammert, M. Schanz, G. Wackenhut, and G. Osipenko. On the software package AnT 4.669 for the investigation of dynamical systems. In G. Osipenko, editor, *Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, volume 9, pages 24 – 35. St. Petersburg State Polytechnic University, Russia, June 2003.
5. M. Dellnitz and A. Hohmann. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. *Numerische Mathematik*, 75:293 – 317, 1997.
6. G. S. Osipenko. Construction of attractors and filtrations. *Banach center publication*, 47:173 – 192, 1999.
7. Г.С. Осипенко О символическом образе динамической системы. *сб. Граничные задачи*, Пермь, 1983, с.101-105.
8. G. S. Osipenko. *Lectures on symbolic analysis of dynamical systems*. St. Petersburg State Polytechnic University, 2004.